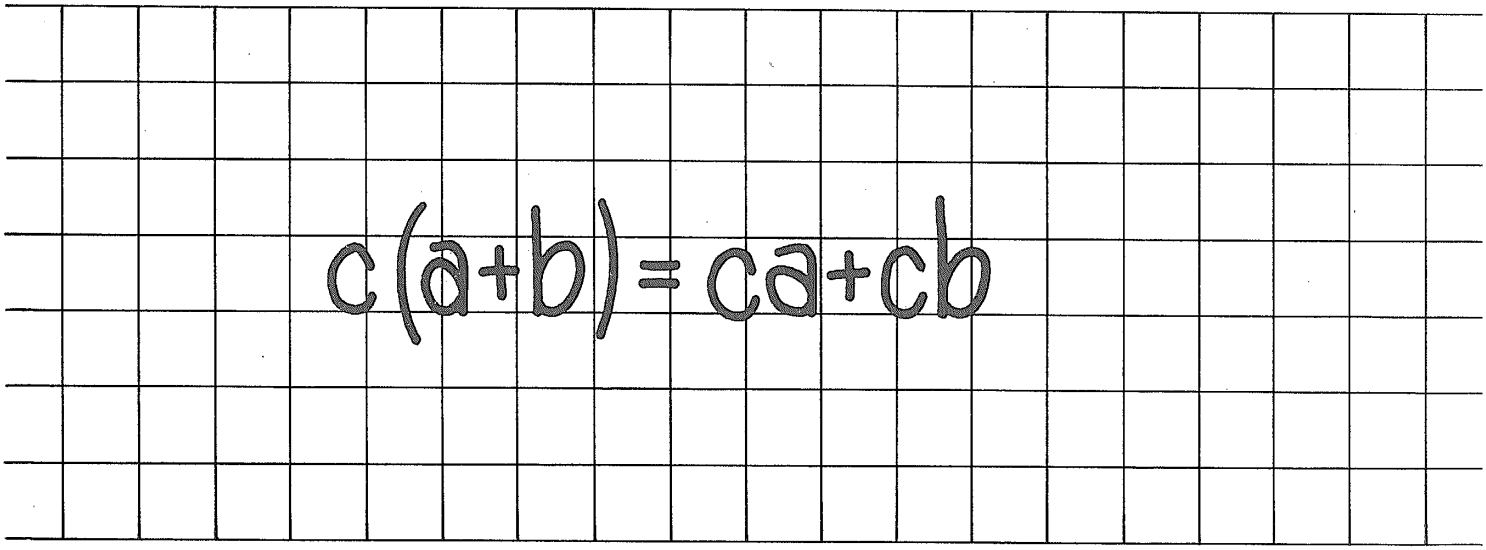
EL CONJUNTO DE LOS REALES

Obras que integran el bloque 1 *(Álgebra. Estructuras y operaciones)*

1. Conjuntos
2. Estructuras matemáticas
3. El conjunto de los enteros
4. Operaciones con enteros
5. Lenguaje algebraico 1. Formación
6. Lenguaje algebraico 2. Transformación
7. Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división
8. Operaciones con polinomios 2. Productos notables
9. Operaciones con polinomios 3. Factorización
10. El conjunto de los racionales
11. Operaciones con expresiones racionales
12. ***El conjunto de los reales***
13. Operaciones con expresiones reales
14. El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 1

Álgebra. Estructuras y operaciones

Módulo 12

EL CONJUNTO DE LOS REALES

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
EL CONJUNTO DE LOS REALES
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1985
ISBN 968-24-1512-8

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

12.1 El conjunto de los números reales 9

12.2 Subconjuntos de los números reales 26

12.3 El grupo abeliano ($\mathcal{R}$, +) 43

12.4 El grupo abeliano ($\mathcal{R}_o$, X) 47

12.5 El campo de los números reales ($\mathcal{R}_o$, + X) 53

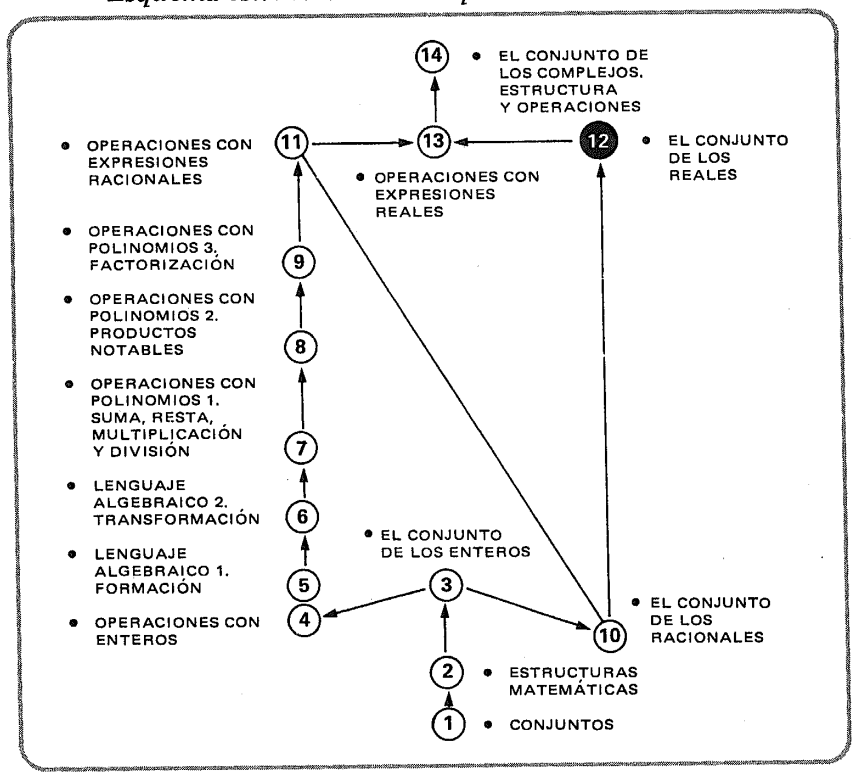
12.6 La sustracción y la división en $\mathcal{R}$ 57

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 1. Álgebra. Estructuras y operaciones

Objetivos: establecer las estructuras matemáticas relacionadas con los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos. Efectuar las cuatro operaciones binarias fundamentales y las operaciones monarias de potenciación y radicación con expresiones algebraicas pertenecientes a cada uno de los cinco conjuntos mencionados

Esquema estructural del bloque 1



Módulo 12. El conjunto de los reales

Objetivos: interpretar la suma, resta, multiplicación y división de números reales como estructuras matemáticas con ciertas propiedades, de las que se deducen las reglas para realizar dichas operaciones

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Nociones de las estructuras matemáticas con una o dos leyes de composición interna	1	2
• Concepto de número entero	1	3
• Manejo de los números enteros	1	4
• Concepto de número racional	1	10

12.1

El conjunto de los números reales

1

Ya explicamos en el módulo 11
cómo toda fracción común

$$\frac{a}{b}$$

puede ser expresada
en forma decimal.

Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} = \underline{\quad\quad}$$

0.75

2

$$\frac{4}{5} = \underline{\quad\quad}$$

0.8

3

$\frac{12}{5} = \square$

2.4

4

0.75
0.8
1.4
} son expresiones decimales **exactas**

5

$\frac{2}{3} = \square$

0.666 ...
$\sqcup$
periodo

6

$\frac{4}{9} = \square$

0.4444...

7

$\frac{16}{3} = \square$

5.333...

8

$\frac{103}{33} = \square$

3.121212...

9

0.666...
0.444...
5.333...
3.121212...

son expresiones decimales **periódicas puras***

*Después del punto decimal se repite indefinidamente un cifra o un conjunto de cifras.

10

$\frac{5}{6} = \underline{\quad\quad}$

Parte no periódica

0.8333...

periodo

11

$\frac{41}{150} = \underline{\quad\quad}$

0.27333...

12

$$\frac{11}{6} = \boxed{}$$

1.8333...

13

$$\left.\begin{array}{l} 0.8333\ldots \\ 0.27333\ldots \\ 1.8333\ldots \end{array}\right\}$$ son expresiones decimales **periódicas mixtas***

* Después del punto decimal está una parte no periódica, y luego un periodo que se repite indefinidamente.

14

Inversamente,
siempre será posible
expresar en forma de fracción común $\frac{a}{b}$
una **expresión decimal exacta.**

Por ejemplo:

$$0.375 = \boxed{}$$

$$\frac{375}{1000}$$

Y en su forma irreducible:

$$\frac{3}{8}$$

15

$4.50 = \square$

$$4 + \frac{50}{100}$$

$$= 4 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{8 + 1}{2}$$

$$\bullet = \frac{9}{2}$$

16

$10.00 = \square$

$$\frac{10}{1}$$

ó

$$\frac{20}{2}, \frac{30}{3}, \frac{40}{4} \text{ etc.}$$

17

También, siempre es posible expresar en forma de fracción común $\frac{a}{b}$

una **expresión decimal periódica pura.**

Por ejemplo:

$0.121212\ldots = \square$

$$\frac{12}{99}$$

Y en su forma irreducible:

$$\frac{4}{33}$$

18

$1.333\ldots = \square$

$$1 + \frac{3}{9}$$

$$= 1 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3 + 1}{3}$$

$$\bullet = \frac{4}{3}$$

19

$0.342342342\ldots = \square$

$$\frac{342}{999}$$

Y en su forma irreducible:

$$\frac{38}{111}$$

20

Además,
siempre será posible transformar en una fracción común de la forma $\frac{a}{b}$ una

expresión decimal periódica mixta.

Por ejemplo:

$0.1666\ldots = \square$

periodo

$0.1\underline{666}$

parte no periódica

$$\frac{9x1 + 6}{90}$$

$$= \frac{15}{90}$$

Y en su forma irreducible:

$$\bullet \frac{1}{6}$$

21

$0.8333\ldots = \square$

$$\frac{9x8 + 3}{90}$$

$$\frac{75}{90}$$

Y en su forma irreducible:

- $\frac{5}{6}$

22

$3.12444\ldots = \square$

$$3 + \frac{9x12 + 4}{900}$$

$$3 + \frac{112}{900}$$

$$3 + \frac{28}{225}$$

$$\frac{225x3 + 28}{225}$$

- $\frac{703}{225}$

23

$0.0714285714285\ldots = \square$

periodo

$0.0\overline{714285}714285\ldots$

parte no periódica

$$\frac{9x0 + 714285}{9999990}$$

Y en su forma irreducible:

- $\frac{1}{14}$

24

No obstante,
hay expresiones decimales que

no

son exactas,
ni periódicas puras,
ni periódicas mixtas.

25

Un ejemplo de
expresiones que no son
exactas, ni periódicas puras,
ni periódicas mixtas es

$\pi = 3.141592653\ldots$

26

Obtengamos,
utilizando el conocido algoritmo,
una expresión decimal para
la raíz cuadrada de 2.

$\sqrt{2} =$ ⌊_____⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$\sqrt{2}$	1.414213
100	24
400	281
11900	2824
60400	28282
383600	282841
10075900	2828423
1590031	

etcétera

27

$\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$

El proceso puede continuarse indefinidamente...
con la particularidad de que nunca se
obtendrá una sucesión de cifras
que se repita en forma periódica.

No es una expresión decimal exacta, ni periódica pura, ni periódica mixta.

28

$\pi = 3.141592653\ldots$

$\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$

$\sqrt{3} = 1.732050807\ldots$

Expresiones decimales como éstas
no pueden ser escritas
en forma de fracción común

$$\frac{a}{b}$$

29

A los números que
pueden ser expresados
en forma de fracción común

$$\frac{a}{b}$$

les hemos llamado

números [_____]

racionales

30

A los números que
No pueden ser expresados
en forma de fracción común

$$\frac{a}{b}$$

les llamaremos

números **IRRACIONALES**

31

Esto nos lleva a considerar dos clases de números:

racionales: los que pueden ser expresados en la forma $\frac{a}{b}$	**irracionales:** los que **no** pueden ser expresados en la forma $\frac{a}{b}$

32

El conjunto de los **racionales,**
que hasta este momento constituía
nuestro "universo", va a ser ampliado
con la aceptación de los números

irracionales.

33

Así como antes habíamos admitido
en nuestro sistema a números como éstos:

$$-1, \frac{2}{5}, \frac{4}{3}, \frac{40}{7}$$

también, desde este momento, aceptaremos
comonúmeros a los representados así:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3}, \sqrt[8]{7}, \text{ etc.}$$

34

Llamaremos conjunto de los números **reales**
a aquél formado por la unión del conjunto
de los **racionales** y el de los **irracionales.**

reales

racionales: las expresiones decimales exactas, periódicas puras, y periódicas mixtas	**irracionales:** las expresiones decimales que no son exactas, ni periódicas puras, ni periódicas mixtas

35.

Representación simbólica:

$\mathbb{Q} = \{x/x \text{ es un número racional}\}$

$\mathbb{Q}^* = \{x/x \text{ es un número irracional}\}$

$\mathbb{R} = \{x/x \text{ es un número real}\}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$

36

Definición:

$$\mathbb{R} = \left\{x/x \in \mathbb{Q} \vee x \in \mathbb{Q}^*\right\}$$

"o"

37

Señalemos las expresiones representativas de números racionales.

500	-87	1010	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
2	$-\frac{3}{4}$	0.375	
$\frac{347}{183}$	$-\frac{1}{2}$	2.236067977... (sin repetición periódica)	
π	$\sqrt{4}$		
0.75	0.333...	repetido periódicamente	
		$0.\overline{2360679772360}\ldots$	

500	$-\frac{1}{2}$
2	$\sqrt{4}$
$\frac{347}{183}$	0.333...
0.75	1010
-87	0.375
	repetido periódicamente
$-\frac{3}{4}$	$0.\overline{2360679772360}\ldots$

38

Señalar las expresiones representativas de números irracionales.

$\frac{3}{4}$	π	3.1416
0	2.645751311 ... (sin repetición periódica)	1.4142
0.50		$\sqrt[3]{8}$
$\sqrt{5}$	$2.64575131\overline{164}$ ... repetido periódicamente	$\sqrt[3]{5}$
-2		$\sqrt{100}$

$\sqrt{5}$

π

2.645751311 ... (sin repetición periódica)

$\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{5}$

39

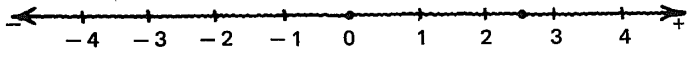
Señalar las expresiones representativas de números reales.

0.424	π	2.15443469 ... (sin repetición periódica)
0.161616 ...	$\frac{38275}{12845}$	$\sqrt{25}$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	
0.91212 ...	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{-4}$
3.1416	$\sqrt{327}$	2.15443469

Todos son reales excepto $\sqrt{-4}$

40

Representación gráfica de los números reales.

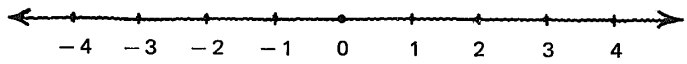


A cada punto de la recta le corresponde un número real, y a cada número real le corresponde un punto de la recta.

41

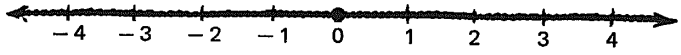
Comparar las dos gráficas siguientes:

- representación gráfica de los enteros (sucesión discontinua de puntos)



- representación gráfica de los reales (sucesión continua de puntos)

42



Un número real (x) puede ser:

negativo, ⌊_____⌋ ó ⌊_____⌋

$x < 0$ ⌊_____⌋ ⌊_____⌋

cero → $x = 0$

positivo → $x > 0$

43

Si a y b son dos números reales

puede suceder que:

$a > b$,

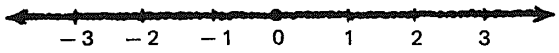
⌊_____⌋

ó ⌊_____⌋

$a < b$

$a = b$

44



En la gráfica de $\mathcal{R}$:

Si a > b, a está a la [_____] de b.
izquierda/derecha

Si a < b, a está a la [_____] de b.
izquierda/derecha

Si a = b, a [_____] b.

derecha

izquierda

coincide con

45

Anotar el signo mayor que (>), menor que (<), o igual a (=), según corresponda, para formar expresiones representativas de proposiciones verdaderas:

4.50 [___] 1.75

1.333 [___] − 8.45

− 5.427 [___] − 1.075

0 [___] − 2.4

1.450 [___] 0

4.50 > 1.75

1.33... > − 8.45

− 5.427 < − 1.075

0 > − 2.4

1.450 > 0

1.12.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.12.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

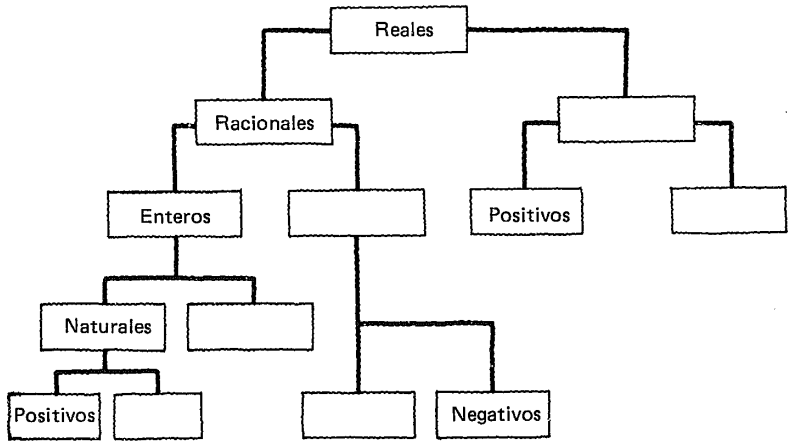
- *identificar* los racionales, irracionales y reales, de un conjunto dado de números;
- *representar* gráficamente el conjunto de los reales, señalando la diferencia que hay respecto de la representación gráfica de los enteros;
- *señalar* el mayor o el menor de dos números reales dados.

12.2

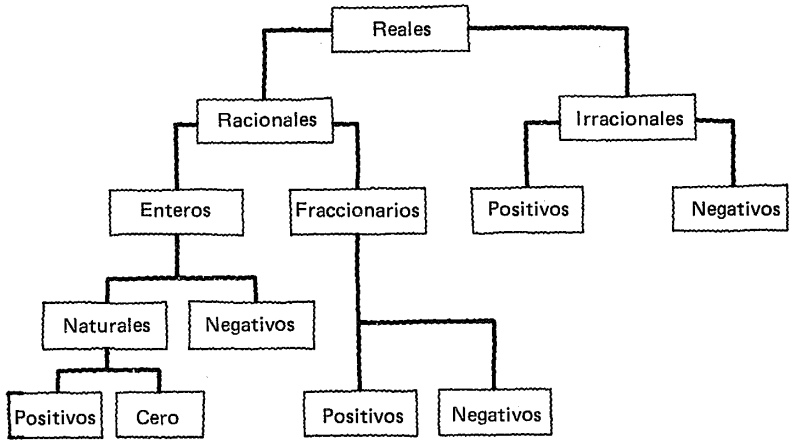
Subconjuntos de los números reales

46

Completar el diagrama:

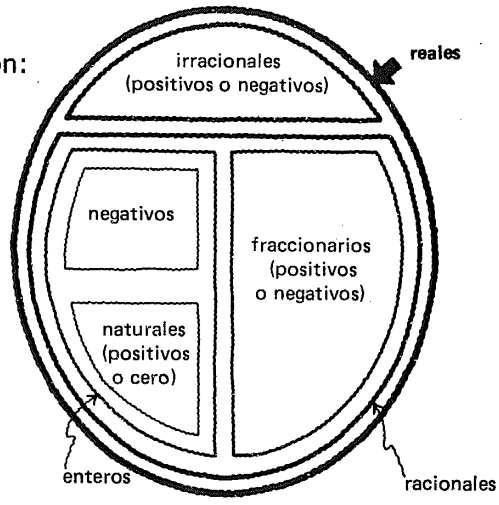


Respuesta
en el
cuadro siguiente



47

Estudiar con mucha atención:

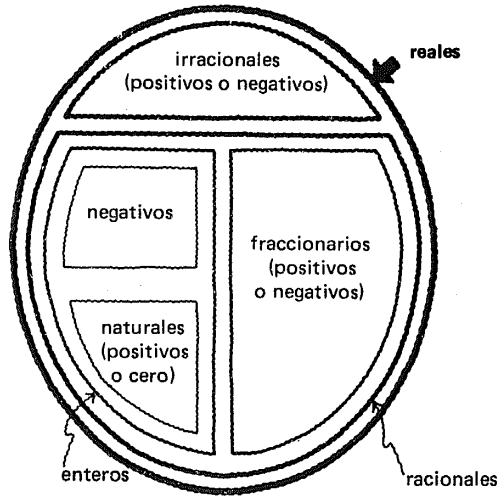


48

Señalar con una X la ubicación del número

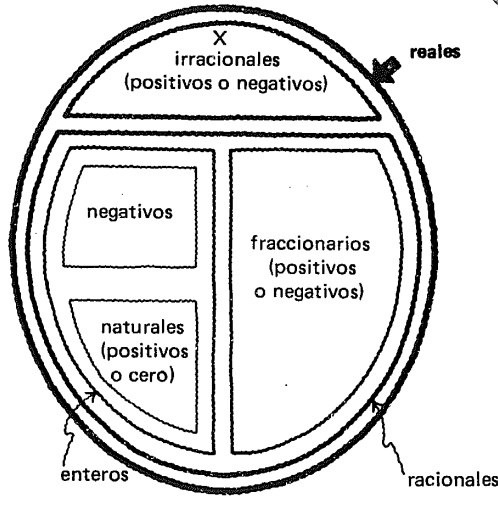
$\sqrt{7}$

en el diagrama.



Respuesta en el cuadro siguiente

$\sqrt{7}$ es un número real, irracional.

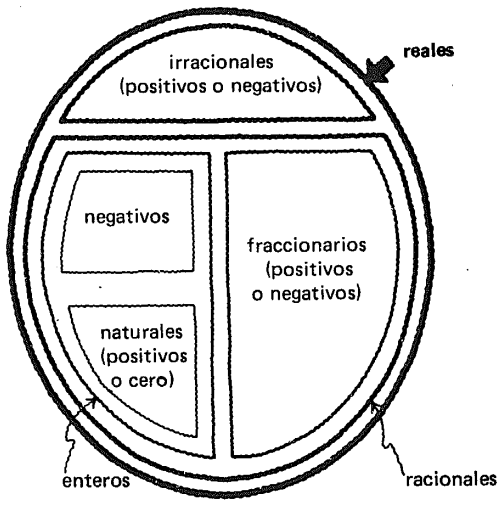


49

Señalar con una X la ubicación del número

$$-\frac{1}{2}$$

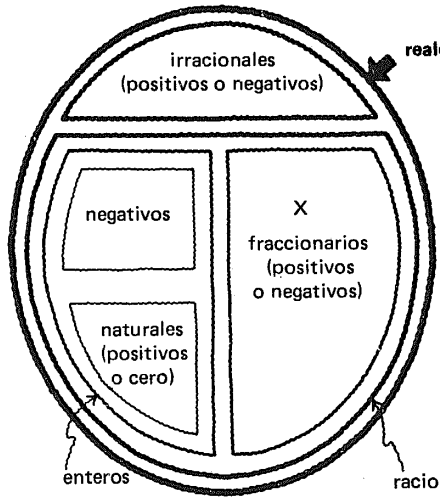
en el diagrama.



Respuesta en el cuadro siguiente

$-\frac{1}{2}$ es un número

real, racional, fraccionario, negativo.

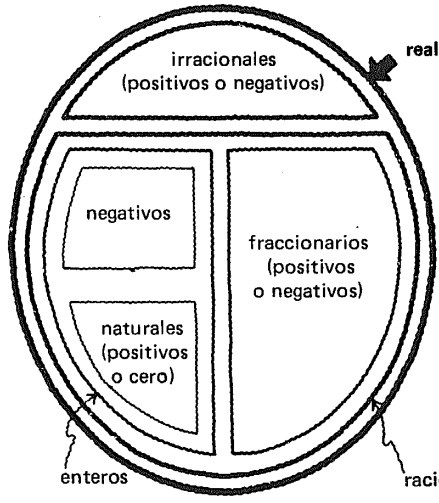


50

Señalar con una X la ubicación del número

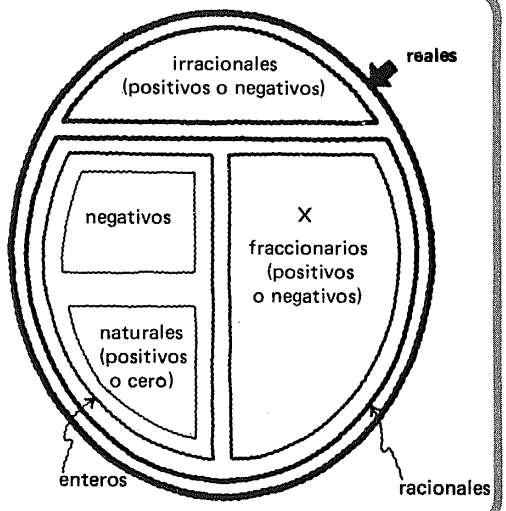
0.171717 ...

en el diagrama.



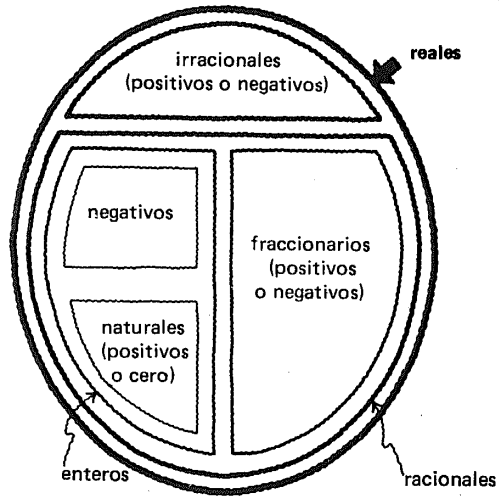
Respuesta en el cuadro siguiente

0.171717 ...
es un número real, racional, fraccionario, positivo.



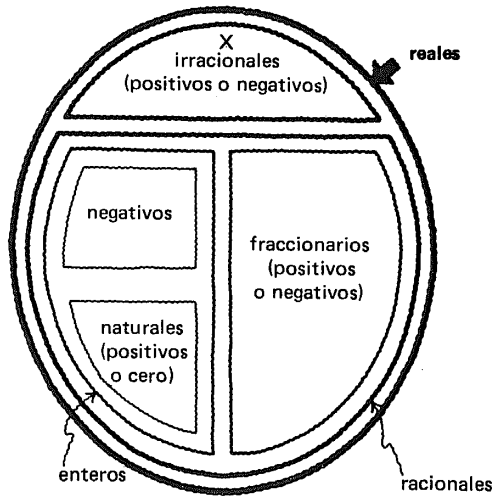
51

Señalar la ubicación del número π



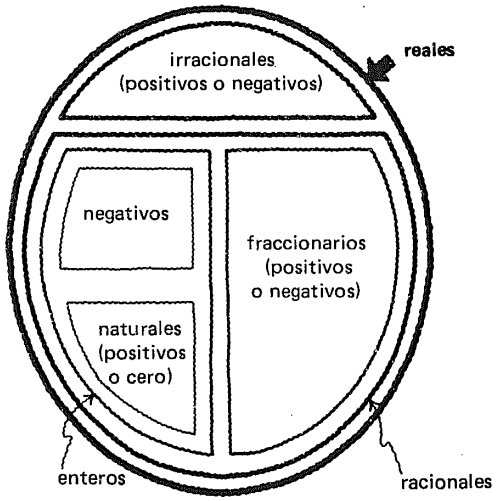
Respuesta en el cuadro siguiente

π es un número real, irracional, positivo.



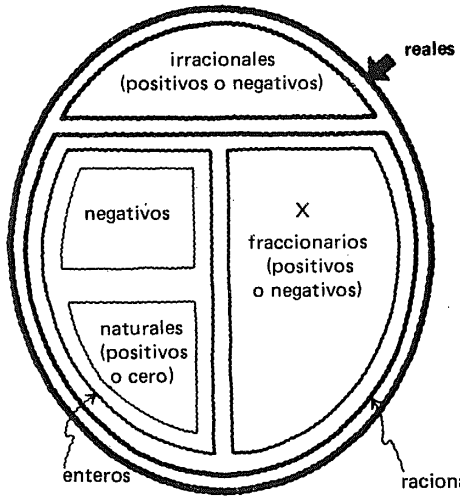
52

Señalar
la ubicación del
número
— 0.354



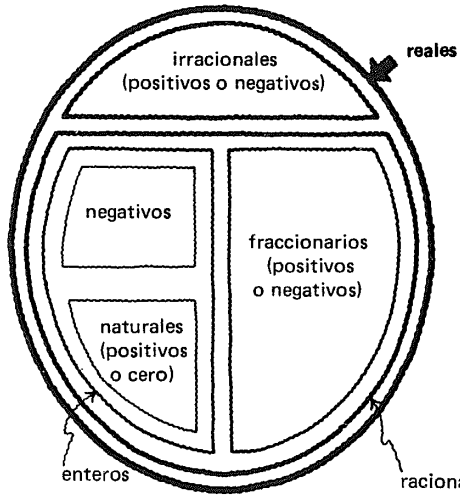
Respuesta
en el
cuadro siguiente

— 0.354 es un
número real, racional,
fraccionario,
negativo.



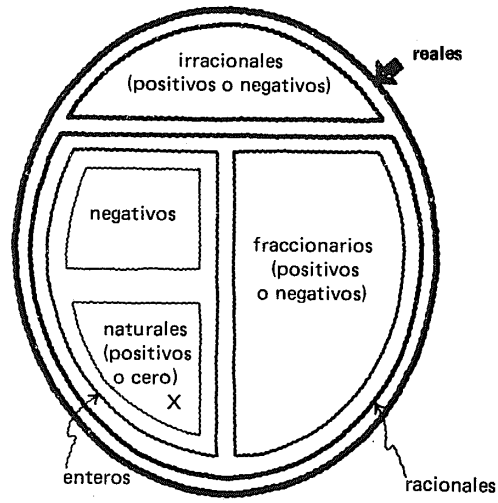
53

Señalar la ubicación
del número 0.



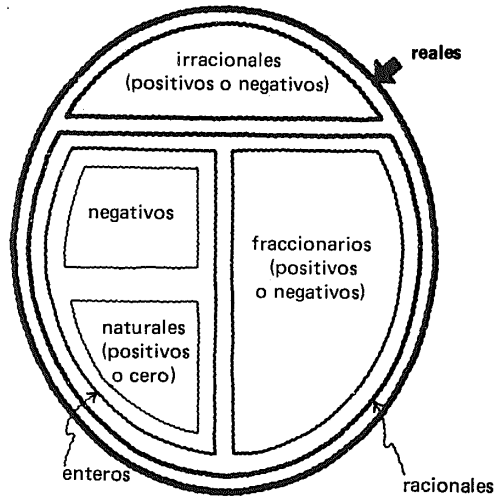
Respuesta
en el
cuadro siguiente

0 es un número real, racional, entero, natural



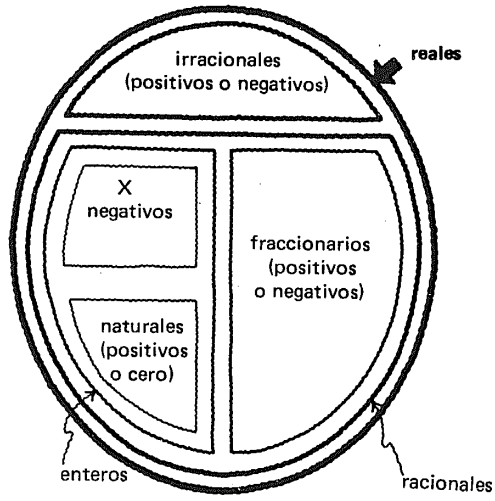
54

Señlar la ubicación del número — 1



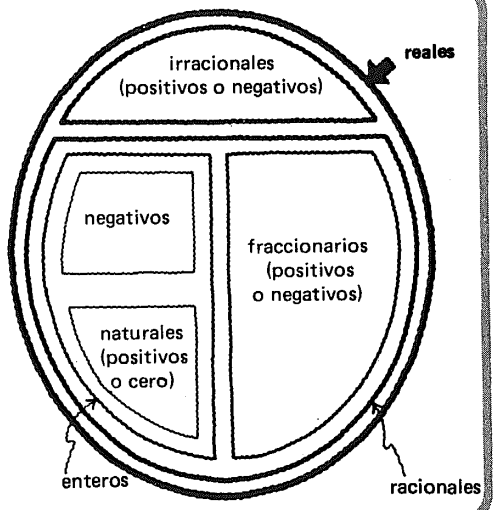
Respuesta en el cuadro siguiente

— 1 es un número real, racional, entero, negativo



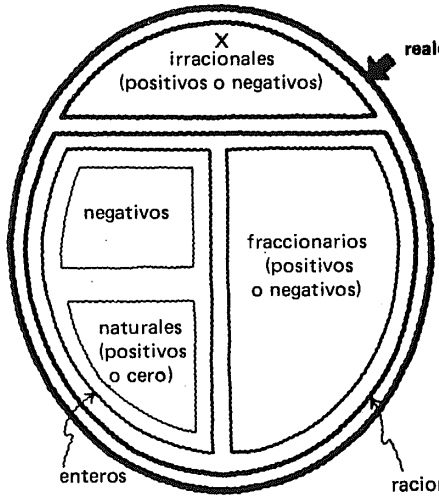
55

Señalar
la ubicación del
número
1.4142...
(sin repetición periódica)



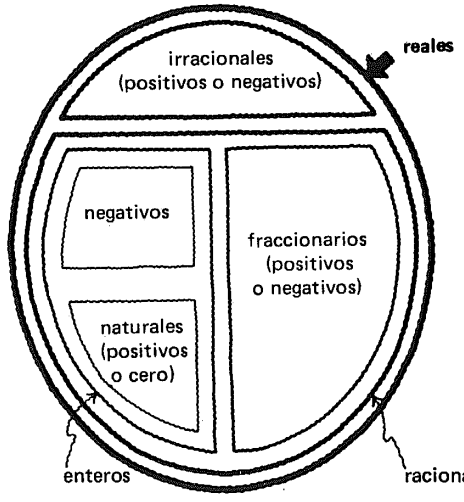
Respuesta
en el
cuadro siguiente

1.4142...
(sin repetición periódica)
es un número real,
irracional, positivo.



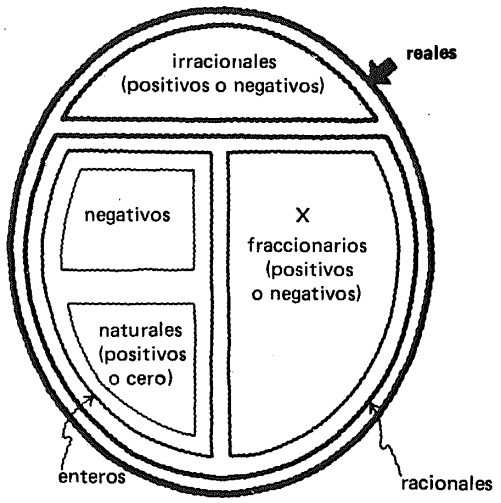
56

Señalar
la ubicación del
número
1.4142 41424...
periodo



Respuesta
en el
siguiente cuadro

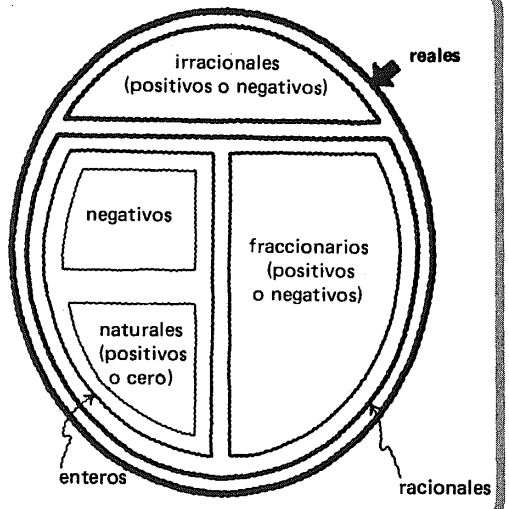
periodo
$1.\overline{414241424}\ldots$
es un número real, racional, fraccionario, positivo.



57

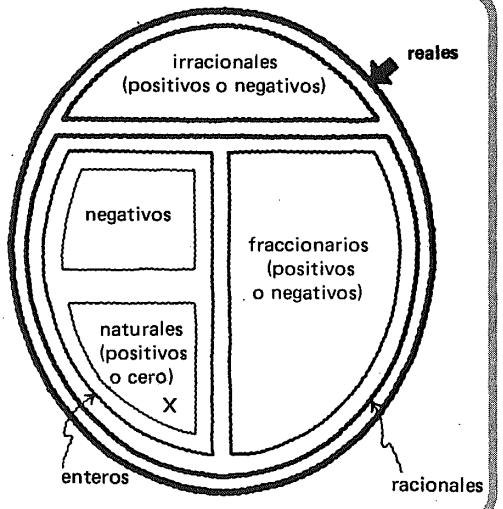
Señalar la ubicación del número

$\frac{10}{5}$



Respuesta en el cuadro siguiente

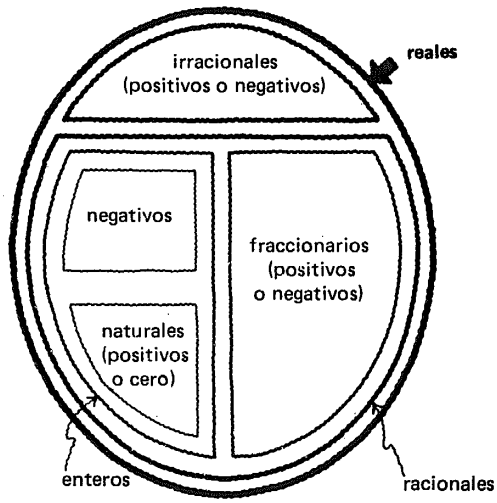
$\frac{10}{5}$ es un número real, racional, entero, natural (es otra forma de escribir:2).



58

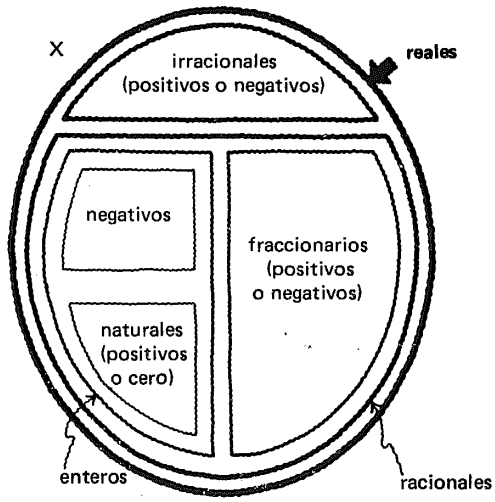
Señalar
la ubicación del
número

$\sqrt{-4}$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

$\sqrt{-4}$
no es un número
real.



1.12.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario

59

Algunas operaciones
con subconjuntos
de números reales.

60

Recordemos que:

$\mathbb{N}$ = { x/x es un número [_____] }

$\mathbb{Z}^-$ = { x/x es un número [_____] }

$\mathbb{Z}$ = { x/x es un número [_____] }

$\mathbb{F}$ = { x/x es un número [_____] }

$\mathbb{Q}$ = { x/x es un número [_____] }

$\mathbb{Q}^*$ = { x/x es un número [_____] }

$\mathbb{R}$ = { x/x es un número [_____] }

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$\mathbb{N}$ = { x/x es un número natural }

$\mathbb{Z}^-$ = { x/x es un número entero negativo }

$\mathbb{Z}$ = { x/x es un número entero }

$\mathbb{F}$ = { x/x es un número fraccionario }

$\mathbb{Q}$ = { x/x es un número racional }

$\mathbb{Q}^*$ = { x/x es un número irracional }

$\mathbb{R}$ = { x/x es un número real }

61

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

V/F

V

62

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

V/F

V

63

$\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{Q}$

V/F

F

64

$\mathbb{Q}^* \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

V/F

V

65

$\mathbb{Q}^* \cap \mathbb{Q} =$ ⌊___⌋

ϕ

66

$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^- =$ ⌊___⌋

ϕ

67

$\mathbb{Z} \cap \mathbb{F} =$ ____

ϕ

68

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{F} =$ ____

$\mathbb{F}$

69

$\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} =$ ____

$\mathbb{Q}$

70

$\mathbb{Z} \cup \mathbb{F} =$ ____

$\mathbb{Q}$

71

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}^* =$ ____

$\mathbb{Q}$

72

$\mathbb{Q} - \mathbb{F} =$ ____

$\mathbb{Z}$

73

$\mathbb{Z} - \mathbb{Z}^- = \square$

$\mathbb{N}$

74

$\mathbb{Z} \cup \square = \mathbb{Q}$

$\mathbb{F}$

75

$\mathbb{Q} \cup \square = \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}^*$

76

$\mathbb{N} - \{0\} = \underline{\quad\quad}$

$\mathbb{Z}^+$

77

Recordemos que:

$$\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} - \{0\}$$

Y, similarmente:

$$\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} - \{0\}$$

1.12.2.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.12.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *ubicar* un número real dado, en alguno de los subconjuntos de $\mathbb{R}$;
- *efectuar* operaciones de intersección, unión y diferencia con subconjuntos de $\mathbb{R}$;
- *señalar* la veracidad o falsedad de una proposición de la forma: $A \subset B$ en que A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

12.3

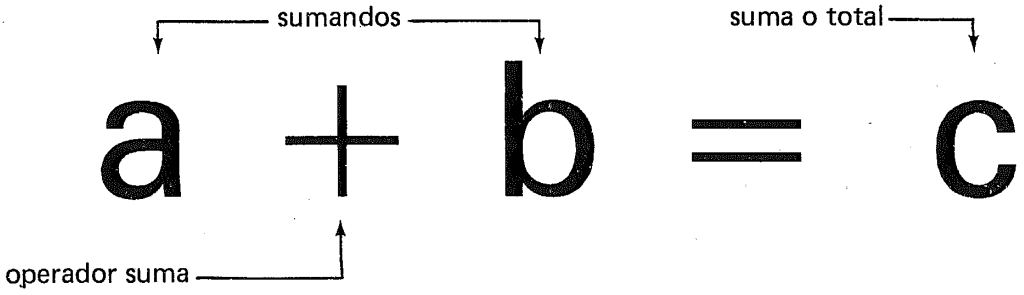
El grupo abeliano $(\mathcal{R}, +)$

78

Propiedades de la
adición de números reales
representada por $(\mathcal{R}, +)$

79

La adición de números reales como operación binaria:



$a, b \in \mathcal{R}$

80

¿Es la adición o suma una **operación cerrada** en el conjunto de los reales? Es decir, en

$$a + b = c$$

si $a \in \mathbb{R}$
y $b \in \mathbb{R}$
¿ $c \in \mathbb{R}$?

Sí/No

Sí

81

¿Es la adición una **operación asociativa** en el conjunto de los reales?

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$

V/F

V

82

¿Existe un **elemento neutro** para la adición, en el conjunto de los reales?

Sí/No

Sí

¿**Cuál** es tal elemento en caso de existir? ⌊___⌋

0 (cero)

Completar:

$$a + \lfloor\_\_\_\rfloor = a$$

$\forall\ a \in \mathbb{R}$

0

83

¿Existe un **elemento inverso aditivo** para cada uno de los números reales?

Sí/No

Completar:

$$a + \square = 0$$

$\forall\ a \in \mathbb{R}$

Sí

$-a$

84

¿Es la suma o adición de números reales una operación **conmutativa**?

Sí/No

Es decir:

$$a + b = b + a$$

$\forall\ a, b \in \mathbb{R}$

V/F

Sí

V

85

Por lo tanto, la estructura

$$(\mathbb{R}, +)$$

es un

[ ]

grupo abeliano

86

Resumen de propiedades de $(\mathcal{R}, +)$:

1. $a + b \in \mathcal{R}$, si $a \in \mathcal{R}$ y $b \in \mathcal{R}$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ $\forall a, b, c \in \mathcal{R}$
3. $a + 0 = a$ $\forall a \in \mathcal{R}$
4. $a + (-a) = 0^*$ $\forall a \in \mathcal{R}$
5. $a + b = b + a$ $\forall a, b \in \mathcal{R}$

*La resta se define como operación inversa de la adición.

87

Definición de la sustracción en $\mathcal{R}$
como operación inversa de la suma:

$$a - b = a + \underbrace{(-b)}$$

inverso aditivo de b

1.12.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *señalar* las propiedades de la estructura $(\mathcal{R}, +)$;
- *explicar,* por medio de ejemplos y con ayuda de las expresiones algebraícas correspondientes, el concepto de sutracción como operación inversa de la adición.

12.4

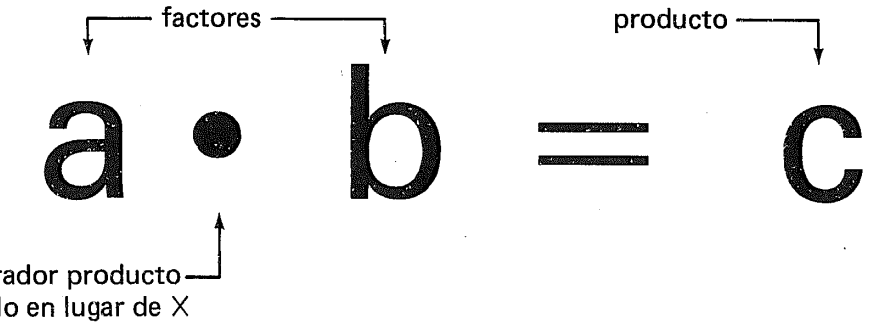
El grupo abeliano $(\mathcal{R}_0, X)$

88

Propiedades de la multiplicación de números reales representada por $(\mathcal{R}, X)$.

89

La multiplicación de números reales como operación binaria:



90

En

$$a \cdot b = c$$

si $a \in \mathcal{R}$

y $b \in \mathcal{R}$

entonces

$$c \in \mathcal{R}$$

V/F

V

91

Decimos que la multiplicación es una operación [_____] en el conjunto de los reales.

cerrada

92

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$\forall\ a, b, c \in \mathcal{R}$

V/F

V

93

La multiplicación de números reales
es una operación [_____]

asociativa

94

$a \cdot$ [____] $= a$

$\forall\, a \in \mathbb{R}$

1

95

El 1
es el elemento [_____]
para
la multiplicación en $\mathbb{R}$.

neutro
o de identidad

96

Completemos:

$a \cdot \square = 1$

$\forall\, a \in \square$

Atención.

$\frac{1}{a}$

$\mathcal{R}_0$,
siendo $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} - \{0\}$

97

En el conjunto de los reales
todo elemento x (con excepción del 0)
tiene un elemento inverso
igual a

$\square$

$\frac{1}{x}$

98

$a \cdot b = b \cdot a$

$\forall\, a, b \in \mathcal{R}$

V/F

V

99

La multiplicación de números reales es una operación [_____]

conmutativa

100

Por lo tanto,

$(\mathcal{R}_0, X)^*$

es un

[_____]

*Multiplicación de números reales excluido el cero.

grupo abeliano

101

Resumen de las propiedades de $(\mathcal{R}_0, X)$:

1. Cerradura
2. Asociatividad
3. Existencia de elemento neutro o de identidad (1)
4. Existencia de elemento inverso para todo elemento de $\mathcal{R}_0{}^*$
5. Conmutatividad

* La división se define como operación inversa de la multiplicación, quedando estrictamente prohibido el uso del cero como divisor.

102

Además,
el elemento 0 (cero)
funciona como

elemento absorbente

para la multiplicación en $\mathbb{R}$,
ya que

$$a \cdot 0 = \square$$

$\forall\, a \in \mathbb{R}$

0

103

Definición de la división en $\mathbb{R}$
como operación inversa de la multiplicación:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \underbrace{\frac{1}{b}}$$

inverso multiplicativo de b

$\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$

1.12.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *señalar* las propiedades de la estructura $(\mathbb{R}_0, \times)$;
- *explicar* por qué se excluye la división por cero en nuestro sistema matemático;
- *explicar,* por medio de ejemplos y con ayuda de las expresiones algebraicas correspondientes, el concepto de división como operación inversa de la multiplicación.

12.5

El campo de los números reales $(\mathcal{R}_0, +\ \times)$

104

Propiedades de la estructura $(\mathcal{R}_0, +\ \times)$

105

Ahora bien,
sabemos que:

$(\mathcal{R}, +)$

es un

[ ]

grupo abeliano

106

Investiguemos si la multiplicación es distributiva (a derecha e izquierda) con respecto a la suma, en el conjunto de los reales.

Es decir:

- $(a + b)c = ac + bc$ V/F
- $c(a + b) = ca + cb$ V/F

$\forall a, b, c \in \mathcal{R}$

V

V

107

$(\mathcal{R}, + X)$

¿Es un **anillo**?

Sí/No

Sí, puesto que cumple con:
cerradura en X
asociatividad en X
distributividad X/+

108

$(\mathcal{R} + X)$

¿Es un **anillo conmutativo**?

Sí/No

Sí, puesto que cumple con:
conmutatividad para X

109

$(\mathcal{R}, + X)$

¿Es un **anillo conmutativo unitario**, o

anillo conmutativo con unidad?

Sí/No

Sí, puesto que cumple con: existencia de elemento neutro para la operación X

110

$(\mathcal{R}, + X)$

¿Es un **campo** (o cuerpo)?

Sí/No

Sí, con la salvedad de que el 0 (cero) no tiene inverso multiplicativo.

111

Podemos hablar, entonces, de

el campo de los números reales,*

que representamos así:

$(\mathcal{R}_0, + X)$.

* El número real 0 (cero) no tiene inverso multiplicativo

1.12.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *señalar* las propiedades de la estructura $(\mathcal{R}_0, +, \times)$ llamada campo de los reales con el cero excluido.

12.6

La sustracción y la división en $\mathcal{R}$

112

Propiedades de la sustracción y de la división de números reales representadas por

$(\mathcal{R}, -)$ y $(\mathcal{R}, \div)$

respectivamente.

113

Indicar las propiedades de la sustracción de números reales, es decir, de la estructura $(\mathcal{R}, -)$:

Propiedad	¿Se cumple?
1 Cerradura	
2 Asociatividad	
3 Existencia de elemento neutro	
4 Existencia de elementos inversos	
5 Conmutatividad	

Nombre de la estructura: [_____]

Respuesta en el cuadro siguiente

$a - b = c$ $\quad a, b \in \mathcal{R}$

	Propiedad	¿Se cumple?
1	Cerradura	Sí
2	Asociatividad	No*
3	Existencia de elemento neutro	Sí
4	Existencia de elementos inversos**	Sí
5	Conmutatividad	No

* Algunos llaman **grupoide** a una estructura como ésta, que no cumple con la asociatividad.

** Cada elemento es el propio inverso sustractivo.

114

Investigar si se cumple la **distributividad de la multiplicación con respecto a la sustracción** en $\mathcal{R}$.

Simbólicamente:

- a la derecha: [ ]
- a la izquierda: [ ]

$(a - b)c = ac - bc$

$c(a - b) = ca - cb$

115

- $(a - b)c = ac - bc$
- $c(a - b) = ca - cb$

$\forall\ a, b, c \in \mathcal{R}$

V/F

V

116

Resumen de las propiedades de la sustracción en $\mathcal{R}$:

1. Si $a \in \mathcal{R}$ y $b \in \mathcal{R}$, $a - b \in \mathcal{R}$
2. La sustracción no es asociativa
3. $a - 0 = a \quad \forall\ a \in \mathcal{R}$
4. $a - a = 0 \quad \forall\ a \in \mathcal{R}$
5. La sustracción no es conmutativa
6. $\left.\begin{array}{l}(a - b)c = ac - bc \\ c(a - b) = ca - cb\end{array}\right\rangle \forall\ a,b,c, \in \mathcal{R}$

117

Indicar las propiedades de la división de números reales es decir, de la estructura $(\mathcal{R}, \div)$:

Propiedad	¿Se cumple?
1 Cerradura	
2 Asociatividad	
3 Existencia de elemento neutro	
4 Existencia de elementos inversos	
5 Conmutatividad	

Nombre de la estructiva: [_____]

Respuesta en el cuadro siguiente

$a \div b = c \quad a, b \in \mathcal{R}, b \neq 0$

Propiedad	¿Se cumple?
1 Cerradura	Sí
2 Asociatividad	No*
3 Existencia de elemento neutro	Sí
4 Existencia de elementos inversos**	Sí
5 Conmutatividad	No grupo abeliano

* Se suele llamar **grupoide** a una estructura como ésta, que no cumple con la asociatividad.

** Cada elemento, con excepción del cero, es inverso de sí mismo.

118

Investigar si se cumple la **distributividad de la división con respecto a la suma** (a la derecha y a la izquierda).

Simbólicamente,

- a la derecha: [ ]
- a la izquierda: [ ]

- $(a + b) \div c = a \div c + b \div c$

o bien

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

- $c \div (a + b) = c \div a + c \div b$

o bien

$$\frac{c}{a + b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$$

119

$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$

- $\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ V/F — V
- $\frac{c}{a + b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$ V/F — F

120

Resumen de las propiedades de la división en $\mathbb{R}$:

1. Si $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, $a \div b \in \mathbb{R}$ para $b \neq 0$
2. La división no es asociativa
3. $\frac{a}{1} = a$
4. $\frac{a}{a} = 1$ para $a \neq 0$
5. La división no es conmutativa
6. $\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$ y $c \neq 0$
   (no se cumple la distributividad a la izquierda)

1.12.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *señalar* las propiedades de la sustracción y de la división de números reales.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 12 de abril de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100